# KOMPLEXE ZAHLEN

Diese Datei gibt einige Seiten Einblick in die Serie
Komplexe Zahlen 1, 2 und 3,
die gegen Zusatzbestellung auf der CD zu haben ist.
Abonnenten erhalten sie automatisch.



Datei Nr. 50000

Friedrich Buckel

Januar 2003

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

**www.mathe-cd.de**

# *Inhalt der Originaldateien*

## Datei 50011



## Datei 50012



## Datei 50013

# § 4 Rechnen mit komplexen Zahlen.

**Um es nochmals zu sagen: Wir führen die komplexen Zahlen so ein, daß wie verlangen, daß die Gesetze der reellen Zahlen gelten sollen. Wir wollen also rechnen, wie wir es aus $\mathbb{R}$ gewohnt sind**

**Daraus folgen Ergebnisse für Summen, Differenzen Produkte und Quotienten, die wir dann als Definition für die Rechenarten unserer „neuen“ komplexen Zahlen übernehmen:**

**(a) Beispiel für die Addition:** $(9+2i)+(7+4i)=(9+7)+(2+4)i=16+6i$

## DEFINITION DER ADDITION:

$$\boxed{(a_1+b_1 i)+(a_2+b_2 i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\cdot i}$$

Es werden also die Realteile addiert und ebenso die Imaginärteile.

**Achtung**: Die Addition der konjugiert komplexen Zahl ergibt eine reelle Zahl.

**Beispiel:** $(9+2i)+(9-2i)=(9+9)+(2-2)i=18\in\mathbb{R}$

**Allgemein:** $(a+bi)+(a-bi)=(a+a)+(b-b)\cdot i=2a$

**AUFGABE 3:**

a) $(12+15i)+(7+4i)$ b) $(-2+5i)+(7-2i)$ c) $(-3-i)+(1-5i)$

d) $(5+2i)+(-5-2i)$ e) $(7-3i)+(-7+9i)$ f) $(1+i)+(-2-i)$

g) $z_1=-13+i\cdot\sqrt{3}$ $z_1+z_1{}^*=?$ h) $z_2=5-8i$ , $z_2+z_2{}^*=?$

**(b) Beispiel für die Subtraktion:** $(9+2i)-(7+4i)=(9-7)+(2-4)i=2-2i$

## DEFINITION DER SUBTRAKTION:

$$\boxed{(a_1+b_1 i)-(a_2+b_2 i)=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\cdot i}$$

**Achtung**: Die Subtraktion der konjugiert komplexen Zahl ergibt eine imaginäre Zahl.

**Beispiel:** $(9+2i)-(9-2i)=(9-9)+(2+2)i=4i$

**Allgemein:** $(a+bi)-(a-bi)=(a-a)+(b+b)\cdot i=2bi$

**AUFGABE 4:**

a) $(12+15i)-(7+4i)$ b) $(-2+5i)-(7-2i)$ c) $(-3-i)-(1-5i)$

d) $(5+2i)-(-5-2i)$ e) $(7-3i)-(-7+9i)$ f) $(1+i)-(-2-i)$

g) $z_1=-13+i\cdot\sqrt{3}$ , $z_1-z_1{}^*=?$ h) $z_2=5-8i$ , $z_2-z_2{}^*=?$

### (c) Beispiel für die Multiplikation:

$$(9+2i)\cdot(7+4i)=9\cdot7+9\cdot4i+2i\cdot7+2i\cdot4i=63+36i+14i+8i^2=63+50i-8=55+50i$$

## DEFINITION DER MULTIPLIKATION:

$$\boxed{\begin{aligned}(a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i)&=a_1a_2+a_1b_2i+b_1i\cdot a_2+b_1i\cdot b_2i=a_1a_2+(a_1b_2+a_2b_1)i+b_1b_2\cdot i^2=\\&=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\cdot i\end{aligned}}$$

**AUFGABE 5:**

a) $(2+3i)(4+7i)$ b) $(3-8i)(5+2i)$ c) $(12-i)(1-12i)$

d) $(-3+2i)(6-2i)$ e) $(5+2i)(5-2i)$ f) $(-2-7i)(-3-8i)$

**Achtung: Die Multiplikation mit der konjugiert komplexen Zahl ergibt eine reelle Zahl und zwar das Quadrat ihres Betrages !**

Beispiel: $z\cdot z^*=(5+12i)\cdot(5-12i)=5^2-12^2\cdot i^2=25+144=169$,
$|z|=|5+12i|=\sqrt{25+144}=13$, also ist $z\cdot z^*=|z|^2 \Rightarrow |z|=\sqrt{z\cdot z^*}$

**AUFGABE 5: Berechne $z\cdot z^*$ für**

g) $z=2+i$ h) $z=19-15i$ i) $z=\sqrt{11}+5i$

Allgemein: $\boxed{z\cdot z^*=(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2=|a+bi|^2}$ !!!

### Ein Wort zu dieser sogenannten 4. Binomischen Formel:

$$\boxed{(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2}$$

Sie berechnet das Produkt einer komplexen Zahl mit ihrer konjugiert komplexen Zahl.

Kehren wir diese Gleichung um, folgt

$$\boxed{a^2+b^2=(a+bi)(a-bi)}$$

Man vergleiche mit der 3. Binomischen Formel:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

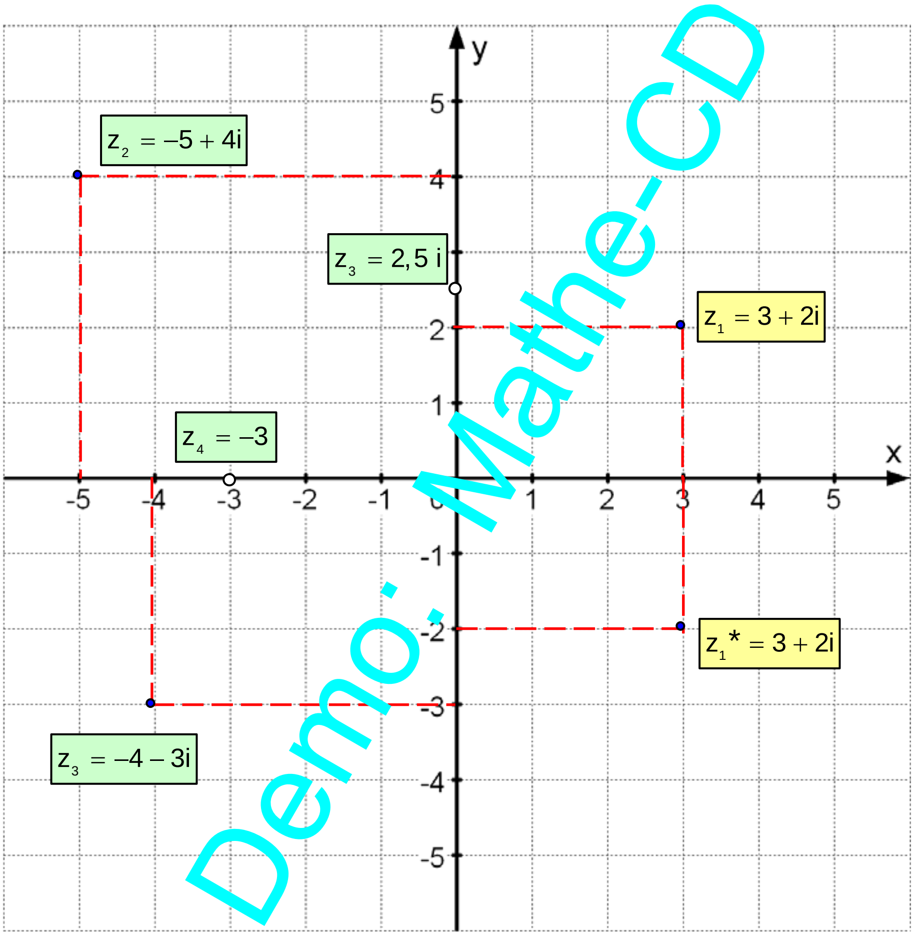
Diese 4. binomische Formel benötigen wir bei der Division komplexer Zahlen.

# § 5 Die Gaußsche Zahlenebene

Weil jede komplexe Zahl aus zwei Anteilen zusammengesetzt ist, dem Realteil und dem Imaginärteil, kann man jede komplexe Zahl als Punkt in einer Ebene mit einem Koordinatensystem darstellen. Man nennt sie die Gaußsche Zahlenebene oder auch die Ebene der komplexen Zahlen.

Als x-Koordinate verwendet man den Realteil: $x = \text{Re}(z)$,
als y-Koordinate den Imaginärteil: $y = \text{Im}(z)$:

Die Zahl $z = 3 + 2i$ wird demnach als Punkt mit den Koordinaten $(3|2)$ dargestelt.






Konjugiert komplexe Zahlen haben den gleichen Realteil und entgegengesetzten Imaginärteil, etwa $z_1 = 3 + 2i$ und $z_1{}^* = 3 - 2i$. Ihre Punkte liegen also zueinander spiegelbildlich bezüglich der x-Achse! Rein imaginäre Zahlen (ohne Realteil) liegen auf der y-Achse, die reellen Zahlen (also ohne einen Imaginärteil) liegen auf der x-Achse.

Damit taucht bereits ein wesentlicher Unterschied zwischen reellen und echt komplexen Zahlen auf. Reelle Zahlen kann man der Größe nach vergleichen. Man kann also sagen, $a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$. Eine dieser dreie Beziehungen muß stimmen!

## 8.2 Multiplikation in Polarkoordinaten

**Beispiel 1 (im Bogenmaß)**

Es sei $z_1 = 4\cdot E\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) = 4\cdot\left(\cos\tfrac{1}{3}\pi + i\cdot\sin\tfrac{1}{3}\pi\right) = 4\cdot\left(\tfrac{1}{2} + i\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 2 + i\cdot 2\sqrt{3}$

und $z_2 = 2\cdot E\left(\tfrac{1}{6}\pi\right) = 2\cdot\left(\cos\tfrac{1}{6}\pi + i\cdot\sin\tfrac{1}{6}\pi\right) = 2\cdot\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + i\cdot\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$

Wir berechnen das Produkt:

Einerseits geht das ganz einfach auf die herkömmliche Art:

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= \left(2 + i\cdot 2\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3} + i\right) = 2\sqrt{3} + 2i + i\cdot 2\cdot 3 + i^2\cdot 2\sqrt{3} = \\ &= 2\sqrt{3} + i\cdot 2 + i\cdot 6 - 2\sqrt{3} = i\cdot 8 \end{aligned}$$

Andererseits rechnen wir mit der sogenannten Polarform:

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= 4\cdot E\left(\tfrac{1}{3}\pi\right)\cdot 2\cdot E\left(\tfrac{1}{6}\pi\right) = 8\cdot E\left(\tfrac{1}{3}\pi + \tfrac{1}{6}\pi\right) = 8\cdot E\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) = \\ &= 8\cdot\left(\cos\tfrac{1}{2}\pi + i\cdot\sin\tfrac{1}{2}\pi\right) = 8(0 + i\cdot 1) = 8i = i\cdot 8 \end{aligned}$$

Wir haben hier die Gleichung (6) von Seite 12 verwendet

$$\boxed{E(\varphi_1)\cdot E(\varphi_2) = E(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Das nächste Beispiel rechnet im Gradmaß, was oftmals wegen der Gewöhnung an diese Winkelmessung einfacher erscheint.

**Beispiel 2 (im Gradmaß)**

Es sei $z_1 = 2\cdot E(45^0) = 2(\cos 45^0 + i\cdot\sin 45^0) = 2\cdot\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + i\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \sqrt{2} + i\cdot\sqrt{2}$ und

$z_2 = 3\cdot E(105^0) = 3(\cos 105^0 + i\cdot\sin 105^0) \approx 3\cdot(-0{,}259 + i\cdot 0{,}966) = -0{,}776 + i\cdot 2{,}90$

Dann folgt über die Polarform-Multiplikation:

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= 2\cdot E(45^O)\cdot 3\cdot E(105^O) = 6\cdot E(45^O + 105^O) = 6\cdot E(150^O) = \\ &= 6\cdot(\cos 150^O + i\cdot\sin 150^O) = 6\cdot(-\cos 30^O + i\cdot\sin 30^O) = \\ &= 6\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + i\cdot\tfrac{1}{2}\right) = -3\sqrt{3} + i\cdot 3 \end{aligned}$$

Nun zeige ich einen tollen Trick: In der Koordinatendarstellung war $z_2$ wegen des Winkels $105^O$ (von dem wir keine genauen Sinus- und Kosinuswerte kennen), nur eine Näherungsdarstellung möglich. Da wir aber das Produktergebnis kennen, können wir über die Auflösung der Gleichung

$$z_1\cdot z_2 = -3\sqrt{3} + i\cdot 3$$

die Zahl $z_2$ als Divisionsergebnis im Gegensatz zu oben genau berechnen:

$$z_2 = \frac{-3\sqrt{3} + i\cdot 3}{z_1}$$

$$z_2 = \frac{-3\sqrt{3} + i\cdot 3}{\sqrt{2} + i\cdot\sqrt{2}}$$

Erweiterung mit dem konjugiert komplexen Nenner:

$$z_2 = \frac{\left(-3\sqrt{3} + i\cdot 3\right)\left(\sqrt{2} - i\cdot\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2} + i\cdot\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} - i\cdot\sqrt{2}\right)} = \frac{-3\sqrt{6} + i\cdot 3\sqrt{2} + i\cdot 3\sqrt{6} - i^2\cdot 3\sqrt{2}}{2+2}$$

$$z_2 = \frac{\left(3\sqrt{2} - 3\sqrt{6}\right) + i\cdot\left(3\sqrt{2} + 3\sqrt{6}\right)}{4} = \left(\tfrac{3}{4}\sqrt{2} - \tfrac{3}{4}\sqrt{6}\right) + i\cdot\left(\tfrac{3}{4}\sqrt{2} + \tfrac{3}{4}\sqrt{6}\right)$$

$$z_2 = \tfrac{3}{4}\left[\sqrt{2} - \sqrt{6} + i\cdot\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)\right] \quad \text{(wenn man will)}$$

Erinnern wir uns: Es war $z_1 = 3\cdot E\left(105^0\right) = 3\left(\cos 105^0 + i\cdot\sin 105^0\right)$

Aus dem Vergleich beider Terme können wir noch etwas anderes herleiten:

$$3\cdot\cos 105^O = \tfrac{3}{4}\sqrt{2} - \tfrac{3}{4}\sqrt{6}$$

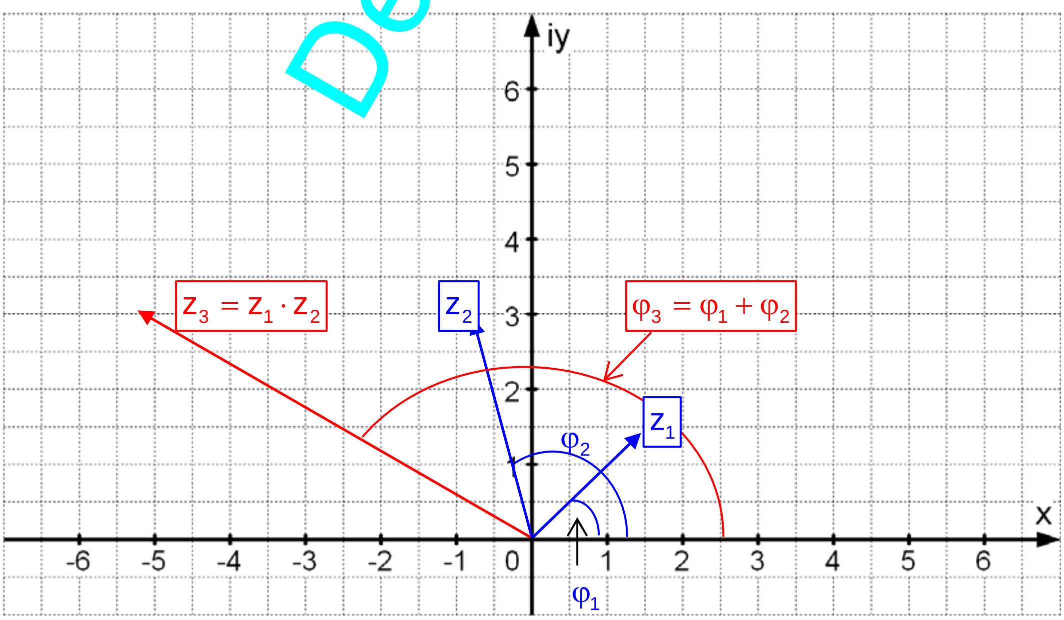
$$\cos 105^O = \tfrac{1}{4}\sqrt{2} - \tfrac{1}{4}\sqrt{6} = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{2} - \sqrt{6}\right)$$

und analog dazu:

$$3\cdot\sin 105^O = \tfrac{3}{4}\sqrt{2} + \tfrac{3}{4}\sqrt{6}$$

$$\sin 105^O = \tfrac{1}{4}\sqrt{2} + \tfrac{1}{4}\sqrt{6} = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$$

**Graphische Darstellung dieser Multiplikation:**



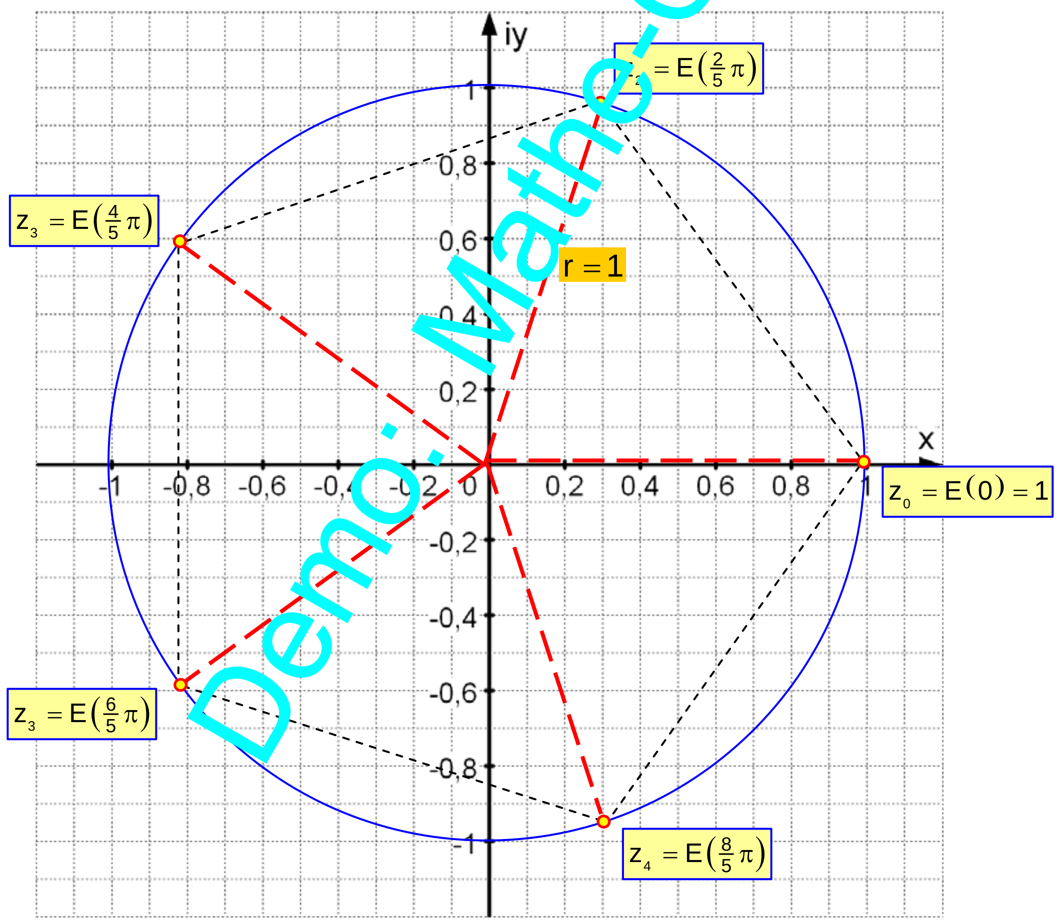
## 10.7 Lösung der Gleichung $z^5 = 1$

Wir übernehmen aus der Seite 2 diese Lösungsformel (für Bogenmaß):

$$\varphi_0 = 0;\ \varphi_1 = \frac{1}{n}\cdot 2\pi;\ \varphi_2 = \frac{2}{n}\cdot 2\pi;\ \varphi_3 = \frac{3}{n}\cdot 2\pi;\ \dots;\ \varphi_{n-1} = \frac{n-1}{n}\cdot 2\pi$$

und setzen n = 5 ein, dann folgen diese Näherungslösungen:

$$\varphi_0 = 0 \ \Rightarrow\ z_0 = E(0) = 1$$
$$\varphi_1 = \tfrac{2}{5}\pi \mathrel{\hat=} 72^O \ \Rightarrow\ z_1 = E\left(\tfrac{2}{5}\pi\right) = \cos\tfrac{2}{5}\pi + i\cdot\sin\tfrac{2}{5}\pi \approx 0{,}309 + i\cdot 0{,}951$$
$$\varphi_2 = \tfrac{4}{5}\pi \mathrel{\hat=} 144^O \ \Rightarrow\ z_2 = E\left(\tfrac{4}{5}\pi\right) = \cos\tfrac{4}{5}\pi + i\cdot\sin\tfrac{4}{5}\pi \approx -0{,}809 + i\cdot 0{,}588$$
$$\varphi_3 = \tfrac{6}{5}\pi \mathrel{\hat=} 216^O \ \Rightarrow\ z_2 = E\left(\tfrac{6}{5}\pi\right) = \cos\tfrac{6}{5}\pi + i\cdot\sin\tfrac{6}{5}\pi \approx -0{,}809 - i\cdot 0{,}588$$
$$\varphi_4 = \tfrac{8}{5}\pi \mathrel{\hat=} 288^O \ \Rightarrow\ z_4 = E\left(\tfrac{8}{5}\pi\right) = \cos\tfrac{8}{5}\pi + i\cdot\sin\tfrac{8}{5}\pi \approx 0{,}309 - i\cdot 0{,}951$$




In dieser Abbildung wurden die 5 Punkte verbunden, es entstand ein regelmäßiges Fünfeck mit dem Innenwinkel $72^O$ und den Eckenwinkeln $108^O$.

## 11.2 Reinquadratische Gleichungen

**Beispiel 1:** $\boxed{z^2 = 2 + i\cdot 2\sqrt{3}}$

Nun ist $a = 2 + i\cdot 2\sqrt{3}$. Umrechnung in Polarkoordinaten:

$$|a| = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4 + 4\cdot 3} = \sqrt{16} = 4$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \;\Rightarrow\; \alpha = \arctan\sqrt{3} = 60^\circ \;\hat{=}\; \tfrac{1}{3}\pi$$

Berechnung der beiden Lösungen durch die Formel $\boxed{z_k = \sqrt[n]{\mathbf{a}}\cdot E\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)}$:

d.h. hier $z_k = \sqrt{4}\cdot E\left(\frac{\frac{1}{3}\pi + 2k\pi}{2}\right) = 2\cdot E\left(\tfrac{1}{6}\pi + k\pi\right)$ $\boxed{z_k = 2\cdot E\left(\frac{6k+1}{6}\pi\right)}$

Für k = 0: $z_0 = 2\cdot E\left(\tfrac{1}{6}\pi\right) = 2\cdot\left[\cos\left(\tfrac{1}{6}\pi\right) + i\cdot\sin\left(\tfrac{1}{6}\pi\right)\right] = 2\cdot\left[\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + i\cdot\tfrac{1}{2}\right] = \sqrt{3} + i$

Für k = 1: $z_1 = 2\cdot E\left(\tfrac{7}{6}\pi\right) = 2\cdot\left[\cos\underbrace{\left(\tfrac{7}{6}\pi\right)}_{210^\circ} + i\cdot\sin\left(\tfrac{7}{6}\pi\right)\right] = 2\cdot\left[-\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - i\cdot\tfrac{1}{2}\right] = -\sqrt{3} - i$

Lösungsmenge: $L = \left\{\sqrt{3} + i;\ \sqrt{3} - i\right\}$

**Beispiel 2:** $\boxed{z^2 = 15\sqrt{3} + i\cdot 15}$

$a = 15\sqrt{3} + i\cdot 15$. Umrechnung in Polarkoordinaten:

$$|a| = \sqrt{\left(15\sqrt{3}\right)^2 + 15^2} = \sqrt{225\cdot 3 + 225} = \sqrt{225\cdot 4} = 15\cdot 2 = 30$$

$$\varphi = \arctan\frac{y}{x} = \arctan\frac{15}{15\sqrt{3}} = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ \text{ , ergibt}$$

$$z_K = \sqrt{|a|}\cdot E\left(\frac{\varphi + k\cdot 360^\circ}{2}\right) = \sqrt{30}\cdot E\left(\frac{30^\circ + k\cdot 360^\circ}{2}\right) = \sqrt{30}\cdot E\left(15^\circ + k\cdot 180^\circ\right)$$

Nun geht es etwas kompliziert weiter:

$$k = 0 \;\Rightarrow\; z_0 = \sqrt{30}\cdot E\left(\tfrac{1}{12}\pi\right) = \sqrt{30}\cdot\left(\cos 15^\circ + i\cdot\sin 15^\circ\right)$$

**Näherungslösung:** $z_0 = \sqrt{30}\left(0{,}966 + i\cdot 0{,}256\right) \approx 5{,}291 + i\cdot 1{,}418$

$$k = 1 \;\Rightarrow\; z_1 = \sqrt{30}\cdot E\left(\tfrac{13}{12}\pi\right) = \sqrt{30}\cdot\left(-\cos 15^\circ - i\cdot\sin 15^\circ\right) = 5{,}291 + i\cdot 1{,}418$$

*Mit Hilfe trigonometrischer Umformungen kann man diese Lösung sogar **exakt** angeben. Das wird auf der nächsten Seite gezeigt:*

Laut Formelsammlung ist $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$. Also folgt:

$$\sin15^\circ=\sin(60^\circ-45^\circ)=\sin60^\circ\cdot\cos45^\circ-\sin45^\circ\cdot\cos60^\circ=\tfrac12\sqrt3\cdot\tfrac12\sqrt2-\tfrac12\sqrt2\cdot\tfrac12$$

d.h. $\sin15^\circ=\tfrac14\left(\sqrt6-\sqrt2\right)$. Ferner folgt aus $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$$\cos15^\circ=\cos(60^\circ-45^\circ)=\cos60^\circ\cdot\cos45^\circ+\sin45^\circ\cdot\sin60^\circ=\tfrac12\cdot\tfrac12\sqrt2+\tfrac12\sqrt2\cdot\tfrac12\sqrt3$$

d.h. $\cos15^\circ=\tfrac14\left(\sqrt6+\sqrt2\right)$

$$z_0=\sqrt{30}\cdot E(15^\circ)=\sqrt{30}\cdot\left(\cos15^\circ+i\cdot\sin15^\circ\right)=\sqrt{30}\cdot\left(\tfrac14\left(\sqrt6+\sqrt2\right)+i\cdot\tfrac14\left(\sqrt6-\sqrt2\right)\right)$$

$$=\tfrac14\sqrt{30}\cdot\left(\left(\sqrt6+\sqrt2\right)+i\left(\sqrt6-\sqrt2\right)\right)$$

$$z_1=\sqrt{30}\cdot E(295^\circ)=\sqrt{30}\cdot\left(-\cos15^\circ-i\cdot\sin15^\circ\right)=\sqrt{30}\cdot\left(-\tfrac14\left(\sqrt6+\sqrt2\right)-i\cdot\tfrac14\left(\sqrt6-\sqrt2\right)\right)$$

$$=\tfrac14\sqrt{30}\cdot\left(-\left(\sqrt6+\sqrt2\right)-i\left(\sqrt6-\sqrt2\right)\right)$$

## Aufgabe 10

Bestimme die komplexen Lösungen der folgenden reinquadratischen Gleichungen:

a) $z^2=15+i\cdot20$ b) $z^2=60-i\cdot80$

c) $z^2=-2+i\cdot2\sqrt3$ d) $z^2=1-i$

e) $z^2=i$ f) $z^2=-i$

g) $z^2=1+i\cdot\sqrt3$ h) $z^2=1-i\cdot\sqrt3$

## *Lösung zu Nummer 15*

a) $z^4 + (1-i)z^2 - i = 0$

Substitution: $u = z^2$ ergibt die quadratische Gleichung $u^2 + (1-i)u - i = 0$

mit $u_{1,2} = \dfrac{-(1-i) \pm \sqrt{(1-i)^2 + 4i}}{2} = \dfrac{-(1-i) \pm \sqrt{1-2i-1+4i}}{2} = \dfrac{-(1-i) \pm \sqrt{2i}}{2}$

Nebenrechnung: $|2i| = 2$ und das Argument von $2i$ ist $\varphi = 90^{\circ}$

Also folgt: $\sqrt{2i} = \sqrt{2} \cdot E\left(\tfrac{1}{2} \cdot 90^{\circ}\right) = \sqrt{2} \cdot E\left(45^{\circ}\right) = \sqrt{2} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + i \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 1 + i$

$$u_{1,2} = \frac{-1+i \pm (1+i)}{2} = \begin{cases} i \\ -1 \end{cases}$$

Lösung der Gleichung $z^2 = i$ : Wegen $|i| = 1$ und $\varphi = 90^{\circ}$ folgt

$$z_K = \sqrt{|i|} \cdot E\left(\frac{\varphi + k \cdot 360^{\circ}}{2}\right) = E\left(\frac{90^{\circ} + k \cdot 360^{\circ}}{2}\right)$$

$k = 0 \;\Rightarrow\; z_0 = E\left(45^{\circ}\right) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + i \cdot \sqrt{2}$

$k = 1 \;\Rightarrow\; z_1 = E\left(225^{\circ}\right) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} - i \cdot \sqrt{2}$

Lösung der Gleichung $z^2 = -1$:

$z_{2,3} = \pm i$

$L = \left\{ \pm i ; \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + i \cdot \sqrt{2} ; -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} - i \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \right\}$