Quadratische Funktionen
Teil 2

Untersuchung und Eigenschaften quadratischer Funktionen

Scheitel
Symmetrie
Nullstellen
Satz von Vieta
Extremwertaufgaben
Parabelgleichung aufstellen

Datei Nr. 18022

Stand 21. September 2008

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

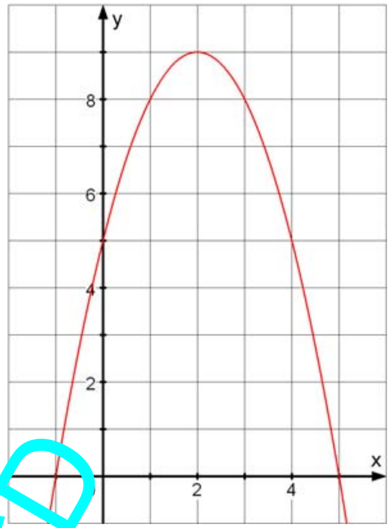
Inhalt

Vorwort

Diese völlig neu gestaltete und erweiterte Datei behandelt quadratische Gleichungen über den Weg der Parabel-Nullstellen. Daher nimmt die Methode der quadratischen Ergänzung auch einen breiten Platz ein. Daneben werden natürlich auch die Lösungsformeln bis zum Erbrechen geübt. Dieser Text hat also das Schwerpunkt-Thema Quadratische Funktionen und Parabeln, bei dem man auch zu quadratischen Gleichungen kommt und deren Lösungsmethoden einführt.

Neben dieser Datei gibt es eine reine Trainingsdatei 12230 zum Thema quadratische Gleichungen. Dort ist dann gar nicht von Parabeln die Rede, sondern es wird nur das Lösen von Gleichungen trainiert. Die meisten Gleichungen des vorliegenden Textes tauchen dort nochmals auf.

3.3 Extremwerte für quadratische Funktionen



Beispiel 1: Die Funktion $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ dient dazu, Funktionswerte zu berechnen. Diese können irgend (eine nicht näher genannte Bedeutung) haben.

Wir sollen klären, für welches x diese Funktion den größten Wert liefert, also ihr **Maximum.**

Lösung: Beim Betrachten des Schaubildes von f wird schnell klar, dass die Aufgabe eine Umschreibung für diese ist: Berechne den Scheitel der zu f gehörenden Parabel K:

Quadratische Ergänzung: $y = -x^2 + 4x + 5$

$y - 5 = -(x^2 - 4x)$

-4x ist das doppelte Produkt in $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$
Daher ergänzen wir in der Klammer das Quadrat 4
(und links – 4 wegen des Faktors – 1)

$y - 5 - 4 = -(x^2 - 4x + 4)$

Scheitelform der Parabel: $y - 9 = -(x-2)^2$

Scheitel: $S(2|9)$

Für unsere Funktion f bedeutet dies:

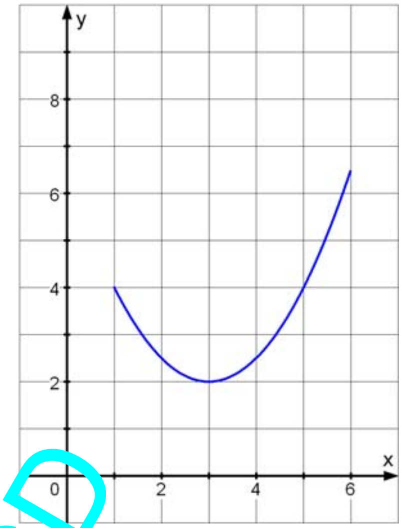
f liefert für x = 2 den maximalen Wert, dieser beträgt 9.

Man nennt 2 die **Maximumstelle** und 9 das **Maximum** der Funktion.

Die Funktion hat somit diese **Wertmenge**: **W =** $]-\infty; 9]$

(d.h. alle Funktionswerte bis maximal 9 können vorkommen).

Beispiel 2: Die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{13}{2}$ ist für den eingeschränkten Definitionsbereich $D=[1;6]$ gegeben. Wo hat diese Funktion maximale bzw. minimale Werte ?



Lösung:

1. Schritt: Scheitelberechnung:

$y-\frac{13}{2}=\frac{1}{2}(x^2-6x)$

$y-\frac{13}{2}+9\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x^2-6x+9)$

$y-2=\frac{1}{2}(x-3)^2$

Scheitel: $S(3|2)$.

2. Schritt: Weil die Parabel nach oben geöffnet ist, hat die Funktion f bei 3 ein **Minimum**. 2 ist das **absolute Minimum** der Funktion!

Das heißt, links und rechts davon sind die Werte größer. Weil hier die Funktion eingeschränkt ist, müssen wir nachrechnen, was am Rand des Definitionsbereiches passiert.

3. Schritt: Randwertberechnung für $D=[1;6]$.

$f(1)=\frac{1}{2}-3+\frac{13}{2}=4$

$f(6)=\frac{1}{2}\cdot 36-3\cdot 6+\frac{13}{2}=18-18+\frac{13}{2}=\frac{13}{2}$

Wie man sieht, hat f links von 3 bei 1 den größten Wert, ein sogenanntes <u>lokales Maximum</u> vom Wert 4.

Rechts von 3 (also für Werte größer als 3) wird bei x = 6 ein Maximum erreicht. Es ist ebenfalls ein lokales Maximum, weil es zunächst für den Bereich $[3;6]$ gilt. Sein Wert ist 6,5.

Unsere Funktion hat also in $D=[1;6]$ zwei Randmaxima:
Das Maximum bei 6 ist dabei größer als das bei 1. Man sagt daher: Bei 6 besitzt f ihr absolutes Maximum, während f bei 1 nur ein relatives Maximum hat.

Wenn die Wertmenge gefragt ist, dann muss man hier $\mathbf{W}=[2;6{,}5]$ angeben, denn 2 ist das absolute Minimum und 6,5 das absolute Maximum !

Ergänzung zu Beispiel 1: $f(x) = -x^2 + 4x + 5$

Würde man dort den Definitionsbereich auf z.B. $D = [0;4]$ beschränken, dann hätte die Kurve zwei Randtiefpunkte und wir könnten zwei lokale Minima berechnen:

Wegen $f(0) = 5$ und $f(4) = 5$ wären jedoch beide gleich klein, also stellt ein absolutes Minimum dar, das an zwei Stellen erreicht wird.

Die Wertmenge wäre dann $\mathbf{W} = [5;9]$

Maximale und minimale Werte bezeichnet man als Extremwerte.

Eine quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ hat für $a > 0$ an der Stelle ein Minimum, an der die zugehörige Parabel ihren Scheitel hat.
Ist $a < 0$, dann liegt dort ein Maximum vor.
Ist der Definitionsbereich begrenzt, dann gibt es an den Randwerten sogenannte Randmaxima oder Randminima, je nachdem, ob $a > 0$ oder $a < 0$ ist.

Aufgabe 20

Bestimme alle Extremwerte ohne eine Zeichnung anzufertigen. Es ist dabei sehr wichtig, geeignete Formulierung und eine ausführliche Textdarstellung zu verwenden. Gib auch die Wertmenge an!

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{13}{4}$ mit $D = \mathbb{R}$

b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 4x - 2$ mit $D = \mathbb{R}$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 3$ mit $D = [-4;2]$

d) $f(x) = -2x^2 + 8x + 4$ mit $D = [0;5]$

§ 4 Aufstellen von Parabelgleichungen

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, dass uns die Abbildung einer Parabel vorliegt und wie kennen ihre Gleichung nicht. Dann gibt es einige Verfahren, diese zu berechnen.

4.1 Parabelgleichung aus den Nullstellen bestimmen

Beginnen wir mit einer Vorübung:

Die Gleichung $(x-2)(x+8)=0$

hat die Lösungen $x_1 = 2$; $x_2 = -8$, denn ein Produkt wird nur dann Null, wenn einer der Faktoren (Klammern) Null wird.

Dies gilt auch für diese Gleichung: $2 \cdot (x-2)(x+8)=0$

Sie hat dieselben Nullstellen ! Ferner alle diese Gleichungen:

$$\tfrac{1}{4}(x-2)(x+8)=0$$
$$-2 \cdot (x-2)(x+8)=0$$
$$\sqrt{1357} \cdot (x-2)(x+8)=0$$
usw.

Allgemein: ***Jede Gleichung*** der Form $k \cdot (x-2)(x+8)=0$ hat die Lösungen $x_1 = 2$; $x_2 = -8$.

Wir können dazu die Probe machen und fassen zusammen:

$$k \cdot \left(x^2+8x-2x-16\right)=0$$
$$k \cdot \left(x^2+6x-16\right)=0.$$

Würde man hier die „Mitternachtsformel" anwenden, erhielte man natürlich dieselben Lösungen: $x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36+64}}{2} = \frac{-6 \pm 10}{2} = \begin{cases} 2 \\ -8 \end{cases}$.

Worauf läuft das hinaus ? Es zeigt, dass man eine Gleichung aus ihren vorgegebenen Lösungen aufstellen kann. Man kann also eine Parabel so planen, dass man ihre Nullstellen festlegt und dann über dieses Produkt die Parabelgleichung bildet.

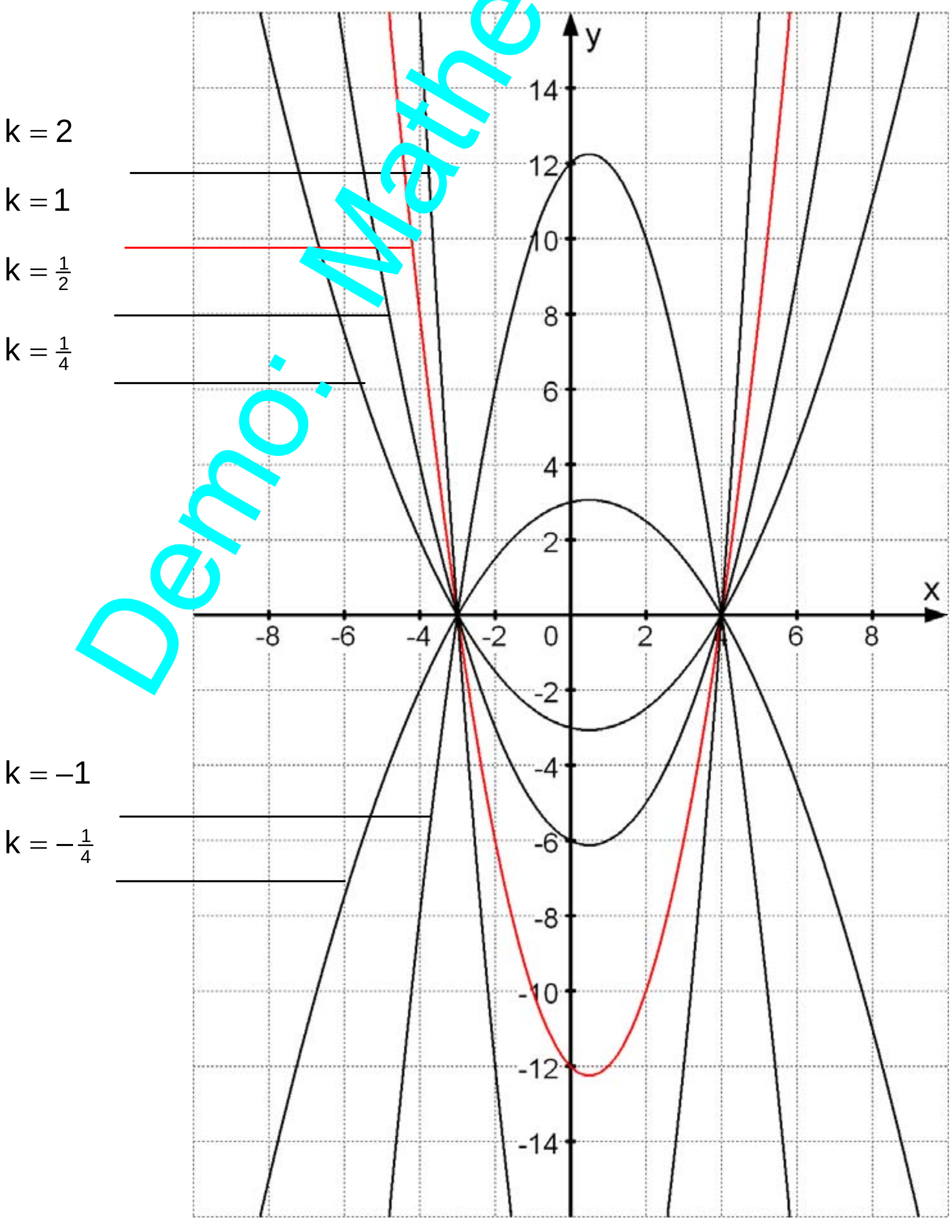
Beispiel 1:

Ein Mathematiklehrer möchte die Gleichung einer Parabel mit den Nullstellen $x_1 = -3$ und $x_2 = 4$ haben. Zunächst weiß er, dass die Grundgleichung $(x+3)(x-4) = 0$ die Lösungen -3 und 4 hat. Nun fehlt nur noch der Streckfaktor k, der ja an diesen Nullstellen nichts mehr ändert. Er macht die Parabel lediglich schlank oder breit.

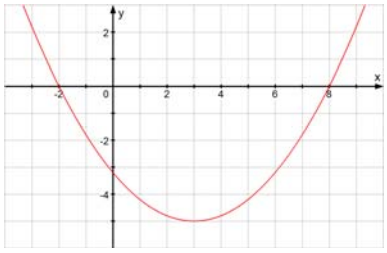
$$y = k\cdot(x+3)(x-4)$$
$$y = k\cdot\left(x^2+3x-4x-12\right)$$
$$y = k\cdot\left(x^2-x-12\right)$$

Für eine Normalparabel wird er k = 1 wählen, für eine flachere Parabel $k = \frac{1}{2}$ oder $k = \frac{1}{4}$, für eine schlanke Parabel etwa $k = 2$. Wenn er zusätzlich k negativ macht, ist die Parabel eben nach unten geöffnet.

Diese Abbildung zeigt einige Parabeln der „Schar“ $y = k\cdot\left(x^2-x-12\right)$:



Beispiel 2:



Die Gleichung nebenstehender Parabel soll bestimmt werden. Wir haben das Glück und können die Nullstellen ablesen: -2 und 8. Dann lautet die Parabelgleichung sicher so:

$$y = k\cdot(x+2)(x-8)$$

bzw. $$y = k\left(x^2+2x-8x-16\right)$$

bzw. $$y = k\left(x^2-6x-16\right)$$

Um k zu bestimmen benötigt man einen weiteren Punkt, etwa den Scheitel: $S(3\,|\,-5)$.
Wir setzen diesen Punkt in die Gleichung ein und erhalten

$-5 = k(9-18-16)$ also $-25\cdot k = -5 \Rightarrow k = \frac{1}{5}$

Damit lautet die Parabelgleichung $y = \frac{1}{5}(x+2)(x-8)$

Oder $y = \frac{1}{5}\left(x^2-6x-16\right)$ d.h. $y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{16}{5}$.

Nun will ich die Aufgabe noch einmal verändern und verlange:

Hinweis: **Man hätte auch jeden anderen Punkt ablesen und einsetzen können, etwa** $A(4|-5)$:

Lösung:

Parabelgleichung: $y = k\left(x^2-6x-16\right)$.

Parabel durch $A(4|-5)$: $-5 = k(16-24-16)$

Daraus folgt: $-5 = k\cdot(-24) \Rightarrow k = \frac{5}{24}$

Ergebnis: $y = \frac{5}{24}\left(x^2-6x-16\right)$

d.h. $y = \frac{5}{24}x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{10}{3}$

Dies ist aber nicht mehr dieselbe Parabel. Hier wurde offenbar A (bewusst !) falsch abgelesen !

Beispiel 3: Eine Parabel soll durch die Punkte $N_1(4|0); N_2(-1|0)$ und $P(2|3)$ gehen. Welche Gleichung hat die Parabel ?

Lösung: Auf Grund der Nullstellen 4 und -1 folgt für die Parabel:

$$y = k \cdot (x-4)(x+1)$$

Weil P auf der Parabel liegen soll, muss er diese Gleichung lösen, d.h. wir dürfen ihn einsetzen und erhalten

$$\mathbf{3} = k \cdot (\mathbf{2} - 4)(\mathbf{2} + 1)$$

$$3 = k \cdot (-2) \cdot 3$$

$$-6k = 3 \;\Rightarrow\; k = -\tfrac{1}{2}$$

Ergebnis:

$$y = -\tfrac{1}{2} \cdot (x-4)(x+1)$$

$$y = -\tfrac{1}{2} \cdot (x^2 - 3x - 4)$$

$$y = -\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{3}{2}x + 2$$

Aufgabe 21

Stelle Parabelgleichungen so, dass die vorgegebenen Nullstellen dazu passen:

a) $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $k = 1$

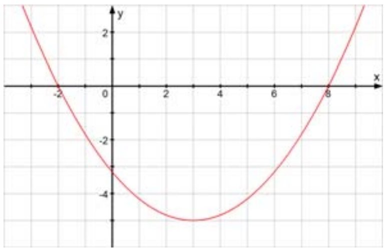
b) $x_1 = -1$, $x_2 = 5$, $k = \tfrac{1}{2}$

c) $x_1 = \tfrac{3}{2}$, $x_2 = -\tfrac{1}{2}$, $k = -1$

d) $x_1 = -4$; $x_2 = \tfrac{1}{2}$; $k = -\tfrac{1}{4}$

4.2 Parabelgleichung bestimmen, wenn der Scheitel bekannt ist.

Beispiel 1



Wir lesen ab: $S(3\,|\,-5)$ und erinnern uns an die Scheitelform der Parabelgleichung:

$$y - y_S = k(x - x_S)^2$$

Setzen wir hier ein, folgt

$$y + 5 = k(x-3)^2$$

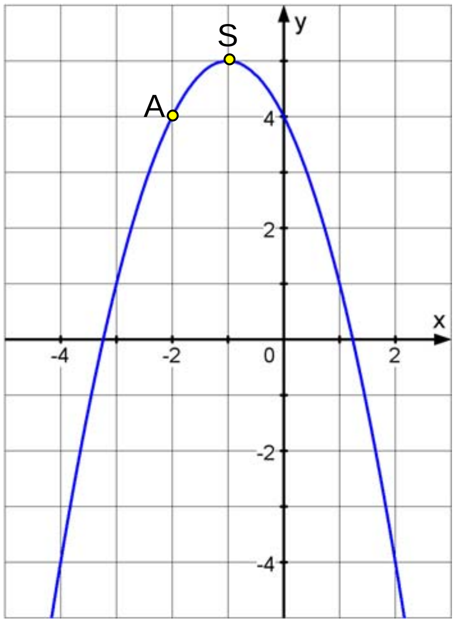
bzw. $$y = k(x^2 - 6x + 9) - 5$$

Jetzt benötigt man noch einen Punkt zum Einsetzen:
Etwa die Nullstelle: $N(-2\,|\,0)$:

$$0 = k(4 + 12 + 9) - 5 \quad \Leftrightarrow \quad 25k = 5 \quad \Leftrightarrow \quad k = \tfrac{1}{5}.$$

Ergebnis: $y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{16}{5}$

Beispiel 2



Abgelesener Scheitel: $S(-1\,|\,5)$.

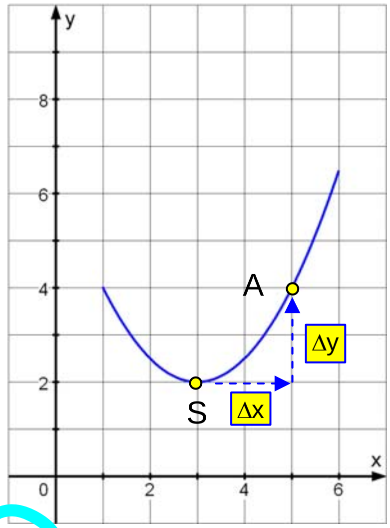
Scheitelform: $y - 5 = k(x+1)^2$

Hier kann man k = - 1 sofort aus der Zeichnung erkennen.

k muss negativ sein, weil die Parabel nach unten geöffnet ist. Außerdem liegt eine (nicht gestreckte) Normalparabel vor, denn wen man vom Scheitel aus um 1 nach links geht, und dann um $1^2 = 1$ nach unten, gelangt man zu einem Parabelpunkt A.

Ergebnis: $y - 5 = -(x+1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = -x^2 - 2x + 4$

Beispiel 3



Abgelesener Scheitel: $S(3\,|\,2)$.

Scheitelform: $y-2=k(x-3)^2$

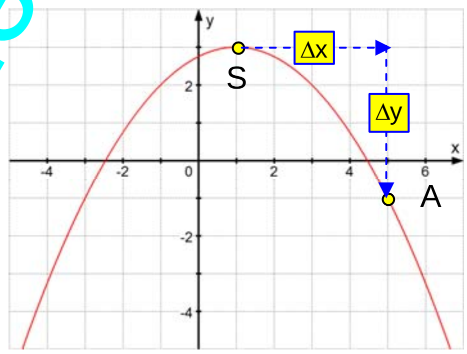
k ist positiv, da die Parabel nach oben geöffnet ist.

Wir können k berechnen, wenn man weiß, dass $\Delta y = k\cdot(\Delta x)^2$ ist. Mit Δx bezeichnet man die Strecke, um die man von S aus nach rechts geht, und mit Δy die Strecke, um die man dann nach oben geht. Man liest dies „Delta x" und „Delta y" !

$\Delta y = k\cdot(\Delta x)^2$ liefert uns $2=k\cdot 2^2 \;\Leftrightarrow\; 2=4k \;\Leftrightarrow\; k=\frac{1}{2}$

Ergebnis: $y-2=\frac{1}{2}(x-3)^2$ bzw. $y=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{13}{2}$

Beispiel 4



Abgelesener Scheitel: $S(1\,|\,3)$.

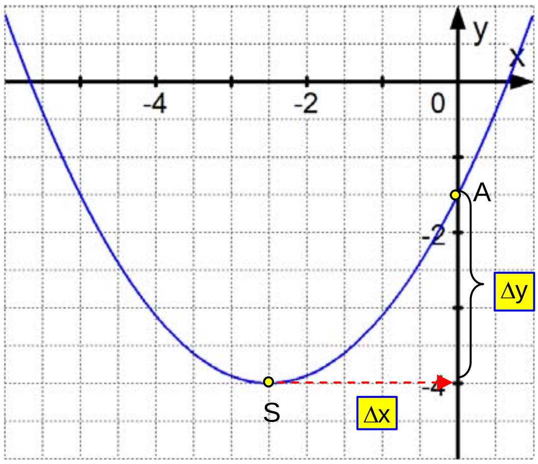
Scheitelform: $y-3=k(x-1)^2$

k ist negativ, da die Parabel nach unten geöffnet ist. Geht man vom Scheitel um $\Delta x = 4$ nach rechts so benötigt man um $\Delta y = -4$ (- heißt nach unten) bis man zu einem Parabelpunkt A gelangt.

Aus $\Delta y = k\cdot(\Delta x)^2$ folgt dann $-4=k\cdot 4^2 \;\Leftrightarrow\; 16k=-4 \;\Leftrightarrow\; k=-\frac{1}{4}$

Ergebnis: $y-3=-\frac{1}{4}(x-1)^2 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{11}{4}}$

Beispiel 5



Abgelesen: Scheitel $S\left(-\frac{5}{2}\,|\,-4\right)$ und $A\left(0\,|\,-\frac{3}{2}\right)$.

Also ist $\Delta x=\frac{5}{2}$ und $\Delta y=\frac{5}{2}$.

Aus $\Delta y = k\cdot(\Delta x)^2$ folgt dann

$$\frac{5}{2}=k\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2 \;\Leftrightarrow\; k=\frac{2}{5}$$

Scheitelform:

$$y+4=\frac{2}{5}\left(x+\frac{5}{2}\right)^2$$

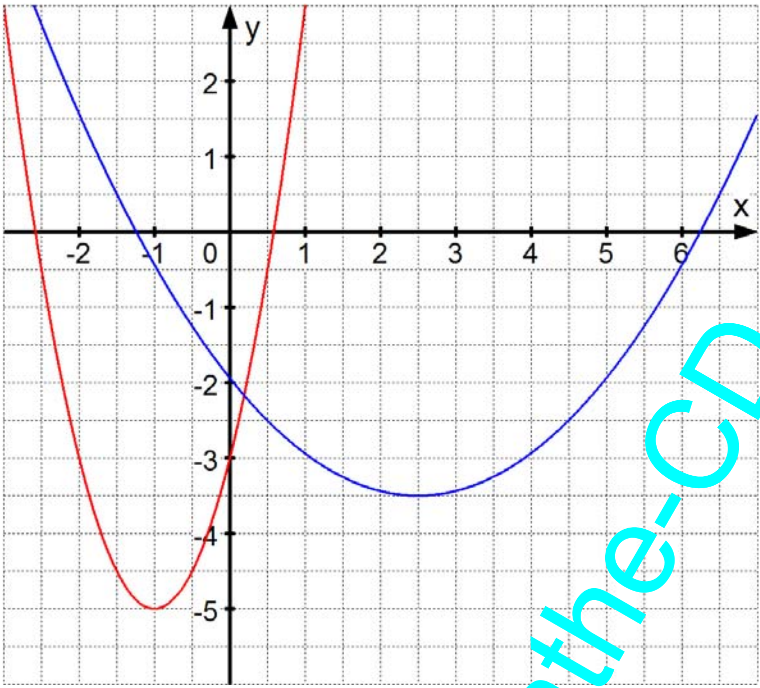
Normalform:

$$y=\frac{2}{5}\left(x^2+5x+\frac{25}{4}\right)-4 \;\Leftrightarrow\; y=\frac{2}{5}x^2+2x+\frac{5}{2}-4 \;\Leftrightarrow\; y=\frac{2}{5}x^2+2x-\frac{3}{2}$$

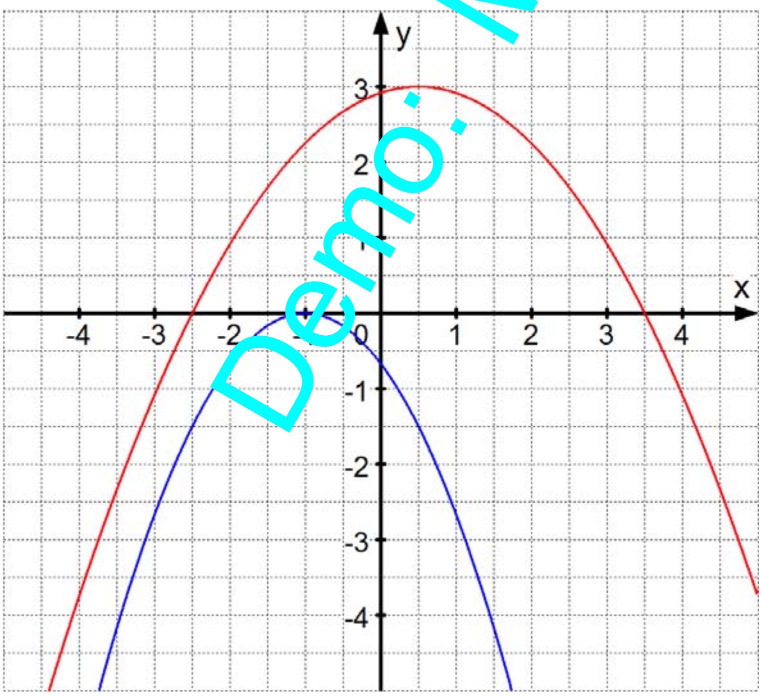
Aufgabe 22

Bestimme die Parabelgleichung durch Ablesen des Scheitels und des Streckfaktors k.

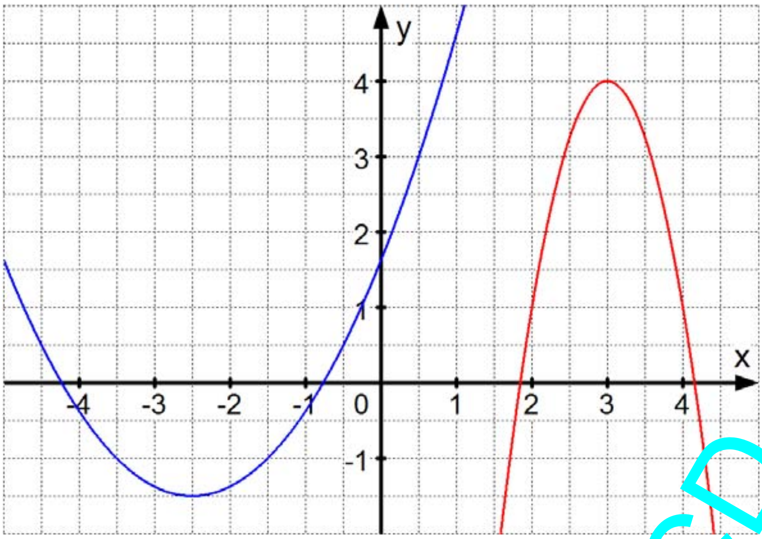
a)



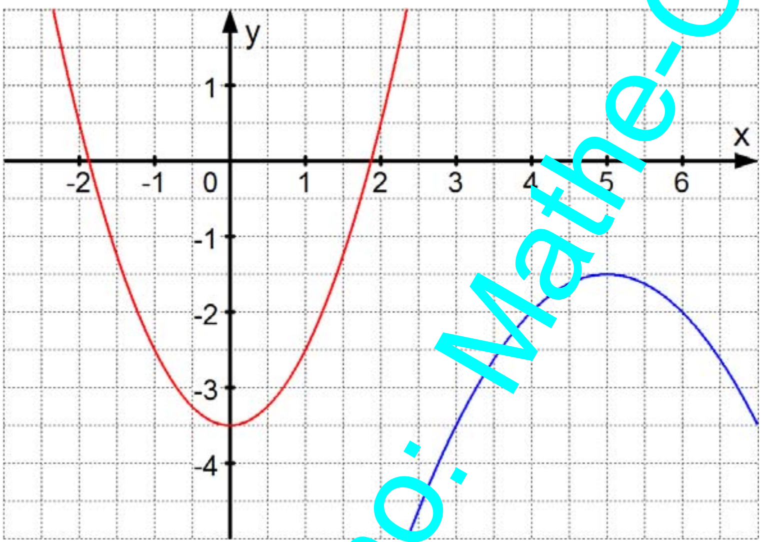
b)



c)



d)



4.3 Parabelgleichung bestimmen, wenn 3 Punkte bekannt sind.

Beispiel 1: Eine Parabel soll durch die Punkte $P_1(2|1); P_2(1|-\frac{5}{2}); P_3(-2|-7)$
Welche Gleichung hat die Parabel ?

Lösung: Ansatz: K: $y = ax^2 + bx + c$

Wir setzen unsere drei gegebenen Punkte ein und erhalten drei Gleichungen mit den unbekannten Koeffizienten a, b und c:

$$P_1(2|1) \in \mathbf{K} \Rightarrow \quad 1 = 4a + 2b + c \quad (1)$$
$$P_2(1|-\tfrac{5}{2}) \in \mathbf{K} \Rightarrow \quad -\tfrac{5}{2} = a + b + c \quad (2)$$
$$P_3(-2|-7) \in \mathbf{K} \Rightarrow \quad -7 = 4a - 2b + c \quad (3)$$

Wir haben somit ein System aus 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten zu lösen !

Man muss erkennen, dass beim Subtrahieren der Gleichungen (1) und (3) a und c wegfallen: $(1)-(3): \quad 8 = 4b \quad \Rightarrow \quad b = 2$

Addiert man (1) und (3), fällt b weg:

$$(1)+(2): \quad -6 = 8a + 2c \quad |:2$$
$$-3 = 4a + c \quad (4)$$

Setzt man b = 2 in (2) ein, erhält man:

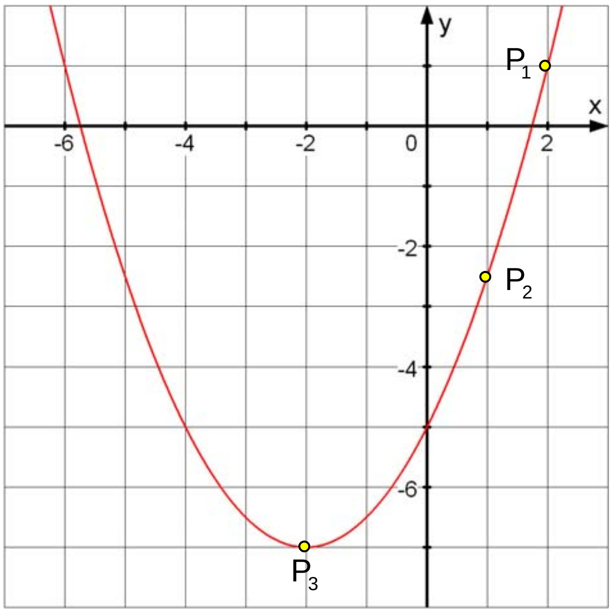
$$-\tfrac{5}{2} = a + 2 + c$$
$$-\tfrac{9}{2} = a + c \quad (5)$$

Mit (4) und (5) besitzt man zwei Gleichungen für die Koeffizienten a und c. Durch Subtraktion fällt c weg:

$$(4)-(5): \quad \tfrac{3}{2} = 3a \Rightarrow a = \tfrac{1}{2}$$

Setzt man dies in (5) ein, folgt c:

$$-\tfrac{9}{2} = \tfrac{1}{2} + c \quad \Rightarrow \quad c = -\tfrac{10}{2} = -5$$



Ergebnis: $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 5$